معادلات کامل

شرط کامل بودن معادله دیفرانسیلی را به‌صورت $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ خواهیم داشت.

گام حل: اگر شرط اخیر برقرار و معادله دیفرانسیلی کامل باشد جواب عمومی آن را از رابطه زیر می‌توان به‌دست آورد:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} p(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} q(x_0,y)dy \Rightarrow f(x,y) = c$$

که در آن x_0 و y_0 اعداد ثابت هستند.

مثال

معادله دیفرانسیلی $(2xy-3x^2y^{-1})dx+(x^3y^{-2}+x^2)dy=0$ را حل کنید.

حل $q(x,y)=x^3y^{-2}+x^2$ و $p(x)=2xy-3x^2y^{-1}$ با توجه به شرط کامل بودن داریم:

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}=2x+3x^2y^{-2}$$

و چون معادله کامل است پس می‌توان نوشت:

$$f=\int(2xy-3x^2y^{-1})dx+h(y)=x^2y-x^3y^{-1}+h(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y-x^3y^{-1}+h(y))=q\Rightarrow x^2+x^3y^{-2}+h'(y)=x^2+x^3y^{-2}$$

لذا $h'(y)=0$ پس $h(y)=c$ و جواب به‌صورت $x^2+x^3y^{-2}=c$ می‌باشد.

مثال

جواب معادله دیفرانسیلی $۲x^۳ \sin y^۲ dx + x^۴ y \cos y^۲ dy = ۰$ را به‌دست آورید.

حل با بررسی کامل بودن معادله خواهیم داشت:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = ۴x^۳ y \cos y^۲$$

$$f = \int ۲x^۳ \sin y^۲ dx + h(y) = \frac{x^۴}{۲} \sin y^۲ + h(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^۴}{۲} \sin y^۲ + h(y)\right) = q \Rightarrow x^۴ y \cos y^۲ + h'(y) = x^۴ y \cos y^۲$$

پس $h(y) = c$ و جواب معادله به‌صورت $\frac{x^۴}{۲} \sin y^۲ = c$ است.

معادلات قابل تبدیل به معادله کامل (عامل انتگرال‌ساز)

گام شناخت: هرگاه شرط کامل بودن معادلات دیفرانسیلی $(p_y = q_x)$ برقرار نباشد آن‌گاه در معادلات غیر کامل با ضرب طرفین معادله در تابعی مانند $\mu(x,y)$ بتوان معادله را به معادله کامل تبدیل نمود چنین تابع $\mu(x,y)$ ای را یک عامل انتگرال‌گیری [10] معادله غیر کامل مربوطه گویند.
یعنی:

$$\mu(x,y)\omega \equiv \mu(x,y)p(x,y)dx + \mu(x,y)q(x,y)dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\mu q)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu p)}{\partial y}$$

الف) فرض کنیم عامل انتگرال‌گیری تنها تابعی از متغیر x باشد، یعنی $\mu = \mu(x)$ در این صورت با فرض $g(x) = \frac{p_y - q_x}{q}$ ضابطه عامل انتگرال‌ساز معادله ازرابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mu(x) = e^{\int g(x)dx}$$

ب) فرض کنیم عامل انتگرال‌گیری تنها تابعی از متغیر y باشد، یعنی $\mu = \mu(y)$ در این صورت با فرض $g(y) = \frac{p_y - q_x}{-p}$ ضابطه عامل انتگرال‌ساز معادله ازرابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy}$$

مثال ۵۴.۱

یک عامل انتگرال‌گیری برای معادله $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$ یافته و معادله را حل کنید.

حل چون $p_y = 2x \neq q_x = -6x$ لذا:

$$\frac{p_y - q_x}{-M} = \frac{2x + 6x}{-2xy} = -\frac{4}{y} = g(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{-4}{y} dy} = \frac{1}{y^4}$$

با ضرب عامل انتگرال‌ساز در طرفین معادله داریم:

$$\frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0 \Rightarrow f(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{2z}{y^3}dz + \int_{y_0}^{y} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{3x_0^2}{z^4}\right)dz$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + k(x_0, y_0) \Rightarrow \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$$

k ثابتی است که به مقادیر ابتدایی x_0 و y_0 بستگی دارد.

مثال

با یافتن عامل انتگرال‌ساز، معادله دیفرانسیلی $2\sin y^2\,dx + xy\cos y^2\,dy = 0$ را حل نمایید.

حل

$$\frac{p_y - q_x}{q} = \frac{4y\cos y^2 - y\cos y^2}{xy\cos y^2} = \frac{3}{x}$$

لذا عامل انتگرال‌ساز $\mu = e^{\int \frac{3}{x}dx} = x^3$ می‌باشد. با ضرب آن در معادله بالا، معادله کامل شده و جواب عمومی به صورت زیر است:

$$\frac{x^4}{2}\sin y^2 = c$$

۸.۱ معادلات خطی مرتبه اول

گام شناخت: شکل استاندارد این معادلات به صورت $y' + p(x)y = q(x)$ می‌باشد. اگر $q(x) = 0$ باشد، معادله دیفرانسیلی را همگن و در غیر این صورت آن را ناهمگن نامند. شکل همگن را می‌توان به روش معادلات جدایی پذیر به صورت $y(x) = e^{-\int p(x)dx}$ حل کرد.

گام حل: جواب عمومی در حالت ناهمگن را به صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

جواب عمومی:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + c\right)$$

مثال ۶۸.۱

معادله دیفرانسیلی $(1-x^2)y'+xy=x$ با شرط $y(0)=2$ را حل کنید.

حل

$$y'+\frac{x}{1-x^2}y=\frac{x}{1-x^2}$$

پس طبق شکل کلی معادله خطی $p(x)=\frac{x}{1-x^2}$ و $q(x)=\frac{x}{1-x^2}$ و داریم:

$$y(x)=e^{-\int\frac{x}{1-x^2}dx}\left(\int\frac{x}{1-x^2}\cdot e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx}dx+c\right)$$

$$=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\int x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx+c\right)=1+c\sqrt{1-x^2}$$

با اعمال شرایط اولیه داریم:

$$y(0)=2 \qquad \Rightarrow c=1$$

در نتیجه جواب خصوصی به‌صورت $y(x)=1+\sqrt{1-x^2}$ می‌باشد.

مثال ۷۱.۱

مطلوب است حل معادله دیفرانسیلی $y - xy' = y'y^{۲}e^{y}$

حل چون معادله خطی نسبت به x است پس داریم:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{۱}{y}x = ye^{y} \quad , \quad \mu = e^{-\int \frac{dy}{y}} = y^{-۱}$$
$$x = y\left[\int ye^{y}e^{\int -\frac{۱}{y}dy}dy + c\right] = y(e^{y} + c)$$

مثال ۷۴.۱

مطلوبست حل معادله دیفرانسیلی $(x+۱)y' - ۳y = (x+۱)^{۵}$

حل چون معادله دیفرانسیلی خطی است می‌توان نوشت:

$$y' - \frac{۳}{x+۱}y = (x+۱)^{۴} \Rightarrow \mu = e^{-۳\int \frac{dx}{x+۱}} = (x+۱)^{-۳}$$
$$y = (x+۱)^{۳}\left[\int (x+۱)dx + c\right] = (x+۱)^{۳}\left(\frac{x^{۲}}{۲} + x + c\right)$$

مثال ۶۹.۱

جواب معادله دیفرانسیلی $dx-(۱+۲x\tan(y))dy=۰$ را به‌دست آورید.

حل با توجه به نکته فوق با تعویض نقش x و y در معادله داریم:

$$\frac{dx}{dy}-(۲\tan(y))x=۱$$

پس معادله خطی برحسب x می‌باشد و $p(y)=-۲\tan(y)$ و $q(y)=۱$ و داریم:

$$x=e^{\int ۲\tan y dy}\left(\int ۱e^{-\int ۲\tan y dy}+c\right)=\sec^{۲}(y)\left(\int \cos^{۲} y dy+c\right)$$

$$\Rightarrow x\cos^{۲} y=\frac{۱}{۲}y+\frac{۱}{۴}\sin(۲y)+c$$

معادلات برنولی

گام شناخت: معادله دیفرانسیلی به فرم کلی $y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$ را معادله برنولی[11] می‌گویند.

گام حل: با ضرب طرفین معادله بالا در y^{-n} و سپس تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ معادله برنولی به معادله خطی مرتبه اول به صورت $u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$ تبدیل می‌شود.

مثال

معادله دیفرانسیلی $x(1-x^2)y' + (2x-1)y = x^3y^2$ را حل کنید.

حل معادله دیفرانسیلی برنولی با $n = 2$ می‌باشد، پس:

$$u = y^{-1} \quad , \quad y^{-2}y' + \frac{2x-1}{x(1-x^2)}y' = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow -y'y^{-2} = u' \Rightarrow u' + \frac{1-2x}{x(1-x^2)}u = \frac{x^2}{x^2-1} \quad \text{خطی مرتبه اول}$$

$$u(x) = e^{-\int(\frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2})dx}\left[\int \frac{x^2}{x^2-1} e^{\int(\frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2})dx} dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\left(x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right) + c$$

مثال

معادله دیفرانسیلی $xy' - ۲y = ۴x^۳\sqrt{y}$ را به معادله خطی تبدیل کرده و حل نمایید.

حل با تغییر متغیر زیر داریم:

$$u = y^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow u' = \frac{۱}{۲}y^{-\frac{۱}{۲}}y' \Rightarrow u' - \frac{۱}{x}u = ۲x^۲$$

$$\mu = e^{-\int \frac{dx}{x}} = x^{-۱}$$

$$u = x\left[\int ۲xdx + c\right] = x^۳ + cx \Rightarrow ۱ = \frac{x^۳ + cx}{\sqrt{y}}$$

مثال

معادله دیفرانسیلی برنولی $(x^۲ \sin y + ۲\sin y)dy - ۲xdx = ۰$ را حل نمایید.

حل داریم

$$x' - \frac{\sin y}{۲}x = \frac{\sin y}{x}\ , \qquad u = x^۲ \Rightarrow u' = ۲xx' \Rightarrow u' - u\sin y = ۲\sin y$$

$$\mu = e^{-\int \sin y dy} = e^{\cos y}$$

$$u = e^{-\cos y}\left[\int ۲\sin y e^{\cos y}dy + c\right] = -۲ + ce^{-\cos y} = x^۲$$

معادلات ریکاتی

گام شناخت: معادله مرتبه اول غیرخطی به شکل کلی $y' + p(x)y + q(x)y^2 = R(x)$ که در آن p، q و R توابعی پیوسته از x هستند، معادله ریکاتی[12] نامیده می‌شود.

گام حل: یک جواب این معادله به صورت $y_1(x) = u(x)$ بوده و جواب‌های دیگر این معادله به شکل $y(x) = y_1(x) + \dfrac{1}{v(x)}$ پس از یافتن $v(x)$ مجهول به دست می‌آیند.

$v(x)$ از حل معادله خطی مرتبه اول زیر مشخص می‌شود:

$$v' - (2u(x)q(x) + p(x))\, v = q(x)$$

مثال

اگر $y_1(x) = x$ یک جواب معادله $y' = x^3(y-x)^2 + \dfrac{y}{x}$ باشد، جواب عمومی معادله را بیابید.

حل با توجه به شکل کلی معادله ریکاتی داریم:

$$p(x) = 2x^4 - \frac{1}{x}\ , \quad q(x) = -x^3\ , \qquad R(x) = x^5$$

$$y' + \left(2x^4 - \frac{1}{x}\right) y - x^3y^2 = x^5 \Rightarrow v' + \frac{1}{x}v = -x^3 \Rightarrow v(x) = \frac{c - x^5}{5x}$$

$$\Rightarrow y(x) = y_1 + \frac{1}{v(x)} = x + \frac{5x}{c - x^5}$$

مثال

معادله دیفرانسیلی ریکاتی زیر را با توجه به جواب خصوصی داده شده، حل نمایید.

$$y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2\ , \qquad y_1 = -x^2$$

حل

$$y = -x^2 + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = -2x - \frac{u'}{u^2}$$

$$-2x - \frac{u'}{u^2} = x^3 + \frac{2}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow u' + \left(\frac{2}{x} + 2x\right)u = \frac{1}{x}$$

$$\mu = e^{\int \frac{2}{x} + 2x dx} = x^2 e^{x^2}$$

$$u = x^{-2}e^{-x^2}\left[\int xe^{x^2}dx + c\right] = \frac{1}{2x^2} + \frac{c}{x^2 e^{x^2}}$$

$$y = -x^2 + \frac{2x^2 e^x}{e^{x^2} + c_1}$$

مثال

مطلوبست حل معادله دیفرانسیلی زیر که یک جواب خصوصی آن داده شده است.

$$y' = e^{-x}y^{۲} + y - e^{x} \,, \qquad y_{۱} = e^{x}$$

حل

$$y = e^{x} + \frac{۱}{u} \Rightarrow y' = e^{x} - \frac{u'}{u^{۲}}$$

$$e^{x} - \frac{u'}{u^{۲}} = e^{-x}\left(e^{x} + \frac{۱}{u}\right)^{۲} + \left(e^{x} + \frac{۱}{u}\right) - e^{x} \Rightarrow u' + ۳u = -e^{-x}$$

$$\mu = e^{\int ۳dx} = e^{۳x}$$

$$u = e^{-۳x}\left[\int -e^{۲x}dx + c\right] = -\frac{۱}{۲}e^{-x} + ce^{-۳x}$$

$$y = e^{x} + \frac{۱}{-\frac{۱}{۲}e^{-x} + ce^{-۳x}}$$

۱۴.۱ مسیرهای عمودی و مایل

یکی از کاربردهای معادلات دیفرانسیلی مرتبه اول یافتن مسیرهای عمودی و مایل می‌باشد که در نظریه حرارت که به خطوط جریان معروف است استفاده می‌شوند. فرض کنیم خانواده‌ای از منحنی‌ها داده شده باشد، می‌خواهیم دسته دیگری از منحنی‌ها را بیابیم به طوری که هر عضو از خانواده اول، منحنی‌های خانواده دوم را با زاویه عمود قطع کند. بدین منظور به‌ازای منحنی انتگرال (دسته منحنی)، $F(x,y,c)=0$ ابتدا با حذف پارامتر c معادله دیفرانسیلی متناظر با خانواده منحنی‌های $g(x,y,c)=0$ را تشکیل می‌دهیم، سپس با تغییر y' به $\frac{-1}{y'}$ (قرینه و معکوس) در معادله دیفرانسیلی ، معادله دیفرانسیلی دسته منحنی‌های که بر خانواده‌ی منحنی‌های $f(x,y,c)=0$ عموداند بدست خواهد آمد. با حل معادله بدست آمده، دسته منحنی‌های $g(x,y,c)=0$ مشخص خواهند شد

مثال ۱۲۶.۱

مسیرهای عمودی خانواده منحنی‌های $y = c(\sec x + \tan x)$ را بیابید.

حل

$$\begin{cases} y = c(\sec x + \tan x) \\ y' = c(\sec \tan x + \sec^۲ x) \end{cases} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \sec x$$

شیب منحنی عمودی : $y' \to \frac{-۱}{y'} : yy' = -\cos x$

با حل معادله دیفرانسیلی ایجاد شده داریم:

$$ydy = \cos x dx \Rightarrow y^۲ = -۲ \sin x + c$$

مثال ۱۲۷.۱

مسیرهای متعامد بر خانواده‌ی یک پارامتری $x^۳ + y^۳ = c$ را بیابید

حل

$$۳x^۲ + ۳y^۲ y' = ۰ \Rightarrow y' = \frac{-x^۲}{y^۲}$$

شیب منحنی متعامد برابر $\frac{dy}{dx} = \frac{y^۲}{x^۲}$ است. با حل آن داریم $y = \frac{x}{۱ - kx}$.

فصل ۲

معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم

۱.۲ معادلات قابل تبدیل به معادلات مرتبه اول

شکل کلی معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم به‌صورت $F(x,y,y',y'')=\circ$ می‌باشد. در بین این معادلات، معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم از اهمیت خاصی برخوردارند.

صورت کلی این معادلات را می‌توان به فرم $y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x)$ در نظر گرفت. اگر توابع $p(x)$ و $q(x)$ به شکل ضرایب ثابت باشند، معادله دیفرانسیلی را با ضرایب ثابت می‌نامند و در غیر این صورت معادلات با ضرایب غیرثابت می‌گویند. اگر تابع $R(x) = 0$ باشد معادله دیفرانسیلی را همگن و در غیر این صورت غیرهمگن می‌نامند.

در این فصل نیز با توجه به دسته‌بندی‌های فوق برای آن‌ها روش‌های حل بیان می‌کنیم.

۲.۲ معادلات مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

شکل کلی این معادلات به صورت $y'' + ay' + by = 0$ می‌باشد که دارای جواب‌هایی به صورت $y(x) = e^{rx}$ بوده و برای تعیین این جواب‌ها کافی است **معادله مشخصه** (معادله مفسر)[1] متناظر معادله که بصورت $r^2 + ar + b = 0$ است را حل نمود. سه حالت برای ریشه‌های معادله مفسر وجود دارد:

الف) اگر در معادله درجه دوم مشخصه $\Delta > 0$ باشد دو ریشه متمایز r_1 و r_2 را داریم و لذا:

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ و r ریشه مضاعف معادله مشخصه باشد جواب عمومی معادله به صورت زیر است:

$$y_h(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

ج) اگر $\Delta < 0$ و $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$ ریشه معادله مشخصه باشند. جواب عمومی همگن را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$y_h(x) = e^{px}\left(c_1 \cos(qx) + c_2 \sin(qx)\right)$$

نکته سه حالت ریشه‌های معادله مفسر برای معادلات دیفرانسیلی مرتبه n ام همگن با ضرایب ثابت به شکل کلی $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ نیز برقرار است.

مثال ۲.۲۸

جواب عمومی معادله $y''-3y'+2y=0$ را به دست آورده و یک جواب خصوصی با شرایط $y(0)=3$ و $y'(0)=5$ را تعیین کنید.

حل معادله مشخصه (مفسر) معادله برابر با $r^2-3r+2=0$ می‌باشد. بنابراین جواب عمومی معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta=1>0\Rightarrow r_1=1 \quad , \quad r_2=2\Rightarrow y(x)=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

جواب خصوصی نیز با تعیین ضرایب ثابت مجهول موجود درجواب عمومی از شرایط اولیه داده شده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} y(0)=c_1+c_2=3 \\ y'(0)=c_1+2c_2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=2 \end{cases} \Rightarrow y_p(x)=e^x+2e^{2x}$$

مثال ۲.۲۹

جواب عمومی معادله $y'' - 6y' + 9y = 0$ را به دست آورید.

حل معادله مشخصه برابر با $r^2 - 6r + 9 = 0$ و $\Delta = 0$ است پس $r = 3$ ریشه مضاعف معادله بوده و جواب عمومی معادله به صورت $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$ می‌باشد.

مثال ۲.۳۰

جواب عمومی معادله $y'' + 2y' + 5y = 0$ را بیابید.

حل

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow r_1 = -1 + 2i \; , \; r_2 = -1 - 2i$$

$$y_1(x) = e^{(-1+2i)x} \quad , \quad y_2(x) = e^{(-1-2i)x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله به صورت $y(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)\right)$ قابل بیان می باشد.

مثال ۳۲.۲

معادله دیفرانسیلی $y''' + 2y'' + y' = 0$ را حل کنید.

حل معادله مفسر عبارت است از:

$$r^3 + 2r^2 + r = 0 \Rightarrow r(r^2 + 2r + 1) = 0 \Rightarrow r = 0, \quad r_{2,3} = -1$$

در نتیجه جواب عمومی عبارت است از:

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} = c_1 + (c_2 + c_3 x) e^{-x}$$

تعریف ۱.۲ فرض کنید توابع $f_1, ..., f_n$ روی بازه Iتعریف شده و حداقل تا مرتبه $(n-1)$ بر این بازه مشتق پذیر باشد دترمینان زیر را **رونسکین** [2] توابع $f_1, ..., f_n$ در نقطه $x \in I$ نامیده و با نماد $W[x; f_1, ..., f_n]$ نمایش می‌دهیم.

$$W[x; f_1, \ldots, f_n] = \begin{vmatrix} f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & & f_x'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

مثال

استقلال خطی یا وابستگی خطی توابع x، x^2 و x^3 را بررسی کنید.

حل

$$W=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{x}R_1+R_2} \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & x & 2x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{x}R_2+R_3} \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & x & 2x^2 \\ 0 & 0 & 2x \end{vmatrix} = 2x^3$$

اگر $x \neq 0$، مستقل خطی، در غیر این صورت وابسته خطی‌اند.

مثال ۳۴.۲

استقلال خطی یا وابستگی خطی توابع e^{x}، e^{2x}، e^{3x} و e^{4x} را بررسی کنید.

حل

$$W = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{3x} & e^{4x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & 3e^{3x} & 4e^{4x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 9e^{3x} & 16e^{4x} \\ e^{x} & 8e^{2x} & 27e^{3x} & 64e^{4x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{x} \cdot e^{2x} \cdot e^{3x} \cdot e^{4x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

چون $W \neq 0$، لذا استقلال خطی دارند.

۳.۲ روش کاهش مرتبه

فرمول آبل: اگر $y_1(x)$ یکی از جواب‌های معادله همگن خطی مرتبه دوم با ضرایب غیرثابت $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ معلوم باشد جواب دیگر را می‌توان از فرمول زیر بدست آورد:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

به رابطه فوق فرمول آبل می‌گویند و جواب عمومی به‌صورت $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ می‌باشد.

مثال ۳۷.۲

اگر $y_1(x) = x$ یک جواب معادله دیفرانسیلی $x^3y'' + x^2y' - xy = 0$ باشد، جواب دیگر آن را بیابید.

حل می‌توان نوشت: $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$ و طبق فرمول آبل داریم:

$$y_2(x) = x \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^3} dx = \frac{-1}{2x}$$

مثال ۳۹.۲

با توجه به این که $y_{۱}(x)=\frac{\cos x}{x}$ یک جواب معادله $xy''+۲y'+xy=۰$ باشد آن گاه جواب عمومی معادله را بیابید.

حل ابتدا جواب دوم معادله همگن را به‌وسیله فرمول آبل محاسبه می‌کنیم.

$$y_{۲}(x)=\frac{\cos x}{x}\int\frac{e^{-\int\frac{۲}{x}dx}}{\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{۲}}dx=\frac{\cos x}{x}\int\sec x^{۲}dx=\frac{\sin x}{x}$$

لذا جواب عمومی عبارت است از:

$$y=c_{۱}\frac{\cos x}{x}+c_{۲}\frac{\sin x}{x}$$

۴.۲ معادلات مرتبه دوم غیر همگن با ضرایب ثابت

۱.۴.۲ روش ضرایب نامعین

فرض کنید معادله مرتبه دوم غیر همگن با ضرایب ثابت به فرم $y'' + ay' + by = f(x)$ باشد و نیز تابع $f(x)$ به شکل کلی $f(x) = e^{ax}(p(x)\cos bx + q(x)\sin bx)$ باشد. برای تعیین جواب عمومی این معادله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا معادله همگن متناظر یعنی $y'' + ay' + by = 0$ را با استفاده از معادله مفسر حل کرده و $y_h(x)$ را تعیین می‌کنیم.

ب) جواب خصوصی معادله نیز به طور کلی به صورت زیر قابل بیان است:

$$y_p(x) = x^m e^{ax}\left[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right]$$

که در این فرم کلی m تعداد تکرار ریشه $a + ib$ در معادله مشخصه معادله همگن متناظر بوده و $R(x)$ و $S(x)$ نیز دو چندجمله‌ای کامل ازدرجه n می‌باشد که n بیش‌ترین درجه بین چند جمله‌ای‌های $p(x)$ و $q(x)$ خواهد بود. سپس جواب عمومی به‌صورت $y = y_h + y_p$ می‌باشد.

مثال ۴۴.۲

فرم جواب خصوصی معادله دیفرانسیلی $y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x}$ را بنویسید.

حل چون $r = 2$ ریشه مضاعف معادله مشخصه معادله همگن متناظر به صورت $r^2 - 4r + 4 = 0$ است. بنابراین فرم کلی جواب خصوصی معادله به شکل $y_p(x) = Ax^2e^{2x}$ خواهد بود که با قرار دادن y_p، y'_p و y''_p در معادله داریم:

$$y'_p = (2Ax + 2Ax^2)e^{2x} \Rightarrow y''_p = (4Ax^2 + 8Ax + 2A)e^{2x}$$

با جای‌گذاری در معادله داریم $A = \frac{5}{2}$ و در نتیجه $y_p = \frac{5}{2}x^2e^{2x}$.

مثال ۴۵.۲

جواب خصوصی معادله دیفرانسیلی $y''' + 4y' = (x^2 - 1) + \sin(2x) + e^{2x}$ را به‌دست آورید.

حل طبق توضیح پیرامون این اصل معادله داده شده را به شکل زیر می‌توان نوشت و برای هر یک شکل جواب خصوصی را داریم:

$$y''' + 4y' = (x^2 + 1) \Rightarrow y_{p_1} = x\left(A_1 x^2 + B_1 x + C_1\right)$$

$$y''' + 4y' = \sin(2x) \Rightarrow y_{p_2} = x\left(A_2 \cos(2x) + B_2 \sin(2x)\right)$$

$$y''' + 4y' = e^{2x} \Rightarrow y_{p_3} = A_3 e^{2x}$$

$$r^3 + 4r = r(r^2 + 4) = 0 \Rightarrow r = 0 \quad , \quad r = \mp 2i$$

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + y_{p_3}(x)$$

با جایگذاری y_p و مشتقات آن در معادله ضرایب مجهول به‌دست می‌آیند.

۱.۹.۱ معادلات برنولی

گام شناخت: معادله دیفرانسیلی به فرم کلی $(n \neq 0, 1)$ $y' + p(x)y = q(x)y^n$ را معادله برنولی[11] می‌گویند.

گام حل: با ضرب طرفین معادله بالا در y^{-n} و سپس تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ معادله برنولی به معادله خطی مرتبه اول به صورت $u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$ تبدیل می‌شود.

مثال ۸۲.۱

معادله دیفرانسیلی $x(1-x^2)y' + (2x-1)y = x^3y^2$ را حل کنید.

حل معادله دیفرانسیلی برنولی با $n = 2$ می‌باشد، پس:

$$u = y^{-1} \quad , \quad y^{-2}y' + \frac{2x-1}{x(1-x^2)}y' = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow -y'y^{-2} = u' \Rightarrow u' + \frac{1-2x}{x(1-x^2)}u = \frac{x^2}{x^2-1} \quad \text{خطی مرتبه اول}$$

$$u(x) = e^{-\int(\frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2})dx}\left[\int \frac{x^2}{x^2-1}e^{\int(\frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2})dx}dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\left(x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right) + c$$

مثال ۸۷.۱

معادله دیفرانسیلی $xy' - 2y = 4x^3\sqrt{y}$ را به معادله خطی تبدیل کرده و حل نمایید.

حل با تغییر متغیر زیر داریم:

$$u = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' \Rightarrow u' - \frac{1}{x}u = 2x^2$$

$$\mu = e^{-\int \frac{dx}{x}} = x^{-1}$$

$$u = x\left[\int 2x dx + c\right] = x^3 + cx \Rightarrow 1 = \frac{x^3 + cx}{\sqrt{y}}$$

مثال ۸۳.۱

معادله $y'(y\cos y - x^3) = x^2y$ را حل کنید.

حل با فرض x به عنوان متغیر وابسته به y معادله داده شده را به عنوان معادله برنولی با

$n = -2$ می‌توان در نظر گرفت. بنابراین با قرار دادن $u = x^3$ خواهیم داشت:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = x^{-2}\cos y \Rightarrow u' + \frac{3}{y}u = 3\cos(y) \quad \text{خطی مرتبه اول}$$

$$u = e^{-\int \frac{3}{y}dy}\left[\int 3\cos y \cdot e^{\int \frac{3}{y}dy}dy + c\right]$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{1}{y^3}\left(3y^3\sin y + 9y^2\cos y - 18y\sin y + 18\cos y + c\right)$$

۱۰.۱ معادلات ریکاتی

گام شناخت: معادله مرتبه اول غیرخطی به شکل کلی $y' + p(x)y + q(x)y^{۲} = R(x)$ که در آن p، q و R توابعی پیوسته از x هستند، معادله ریکاتی[۱۲] نامیده می‌شود.

گام حل: یک جواب این معادله به صورت $y_{۱}(x) = u(x)$ بوده و جواب‌های دیگر این معادله به شکل $y(x) = y_{۱}(x) + \frac{۱}{v(x)}$ پس از یافتن $v(x)$ مجهول به دست می‌آیند.

$v(x)$ از حل معادله خطی مرتبه اول زیر مشخص می‌شود:

$$v' - (۲u(x)q(x) + p(x))\, v = q(x)$$

مثال ۹۳.۱

اگر $y_1(x) = x$ یک جواب معادله $y' = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}$ باشد، جواب عمومی معادله را بیابید.

حل با توجه به شکل کلی معادله ریکاتی داریم:

$$p(x) = 2x^4 - \frac{1}{x}\ ,\quad q(x) = -x^3\ ,\qquad R(x) = x^5$$

$$y' + \left(2x^4 - \frac{1}{x}\right)y - x^3y^2 = x^5 \Rightarrow v' + \frac{1}{x}v = -x^3 \Rightarrow v(x) = \frac{c - x^5}{5x}$$

$$\Rightarrow y(x) = y_1 + \frac{1}{v(x)} = x + \frac{5x}{c - x^5}$$

مثال ۹۵.۱

مطلوب است حل معادله دیفرانسیلی $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$ و $y_1 = \frac{1}{x}$.

حل

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{v}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow v' + \frac{2}{x}v = -1\ ,\qquad \mu = e^{2\int\frac{dx}{x}} = x^2$$

$$v(x) = x^{-2}\left[\int -x^2\,dx + c\right] = -\frac{x}{3} + \frac{c}{x^2} = \frac{c_1 - x^3}{3x^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = y_1 + \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c_1 - x^3}$$

۲.۴.۲ روش تغییر پارامتر

با توجه به این که روش ضرایب نامعین برای حالتی خاص از توابع قسمت غیرهمگن معادله دیفرانسیلی بیان می‌شود حال روشی را بیان می‌کنیم که وقتی قسمت غیرهمگن توابع کلی‌تر باشند قابل استفاده باشد. فرض کنید $y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x)$ یک معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم غیرهمگن با ضرایب غیرثابت باشد. اگر $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ جواب معادله همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد، جواب خصوصی y_p را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

$$u(x) = -\int \frac{R(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)}dx \quad , \quad v(x) = \int \frac{R(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)}dx$$

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

و جواب عمومی معادله غیرهمگن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

مثال ،

اگر $y_1(x)=x$ و $y_2(x)=x^2$ جواب‌های معادله دیفرانسیلی همگن $x^2y''-2xy'+2y=0$ باشد، جواب خصوصی و جواب عمومی معادله دیفرانسیلی غیر همگن $x^2y''-2xy'+2y=\ln x$ را به دست آورید.

حل

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=x^2\ ,\ u(x)=-\int \ln x dx=-x\ln x+x$$

$$v(x)=\int \frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

جواب قسمت همگن به‌صورت زیر است:

$$y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=c_1x+c_2x^2$$

و جواب خصوصی به شکل زیر است:

$$y_p(x)=x^2-x^2\ln x+\frac{x}{2}(\ln x)^2$$

در نتیجه جواب عمومی به‌صورت $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$ می‌باشد.

مثال

جواب معادله دیفرانسیلی $y'' + 2y' + y = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ را بیابید.

حل جواب قسمت همگن معادله به‌صورت زیر است:

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = -1 \Rightarrow y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

لذا جواب خصوصی را خواهیم داشت:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}\ ,\ y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

$$u(x) = -\int \frac{\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}e^{-x}}{e^{-2x}}dx = -\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx = -2\sqrt{1+e^x}$$

$$v(x) = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}xe^{-x}}{e^{-2x}}dx = \int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$$

$$= 2\sqrt{1+e^x}(x-2) - 2\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|$$

پس جواب عمومی به‌صورت $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ است.

مثال ۵۴.۲

جواب خصوصی معادله $y''+y=\sec x\tan x$ را بیابید.

حل معادله مفسر $r^۲+۱=۰$ و دارای ریشه‌های مختلط $r=\pm i$ می‌باشد. لذا $y_۱=\cos x$ و $y_۲=\sin x$ و خواهیم داشت:

$$u=\int\frac{-y_۲R(x)}{w(y_۱,y_۲)}dx=\int\frac{-\sin x\sec x\tan x}{۱}dx$$
$$=-\int\tan^۲ x dx=-\int(\tan^۲ x+۱-۱)dx=-\tan x+x$$
$$v=\int\frac{y_۱R(x)}{w(y_۱,y_۲)}dx=\int\frac{\cos x\sec x\tan x}{۱}dx=\int\tan x dx=-\ln(\cos x)$$

و در نتیجه جواب خصوصی عبارت است از:

$$y_p=uy_۱+vy_۲=(x-\tan x)\cos x-\ln(\cos x)\sin x$$